

Equivalence de la méthode diagrammatique et des techniques traditionnelles de la syllogistique.

Appendice à l'article : « Can we “show” the correctness of reasoning ? ».

Julien Bernard, Centre Gilles Gaston Granger UMR 7304, Aix-Marseille-Université

17 juin 2021

1 Introduction

Le présent texte est un appendice à l'article « Can we “show” the correctness of reasoning? On the role of diagrammatic spatialization in logical justification », écrit à l'occasion du colloque « Quand la forme devient substance. Puissance des gestes, intuition diagrammatique et phénoménologie de l'espace », dirigé par Luciano Boi, Franck Jedrzejewski et Carlos Lobo (25, 26 et 27 janvier 2018).

Il s'agit ici d'utiliser des méthodes classiques de théorie de la démonstration pour montrer rigoureusement que l'usage correctement normé des diagrammes d'Euler (généralisés) est équivalent aux méthodes usuelles non-diagrammatiques, pour caractériser exactement les raisonnements valides de la syllogistique. Nous parviendrons ainsi, après quelques étapes préliminaires, à des théorèmes d'équivalence d'une certaine méthode diagrammatique (celle des diagrammes d'Euler généralisés) vis-à-vis des méthodes syllogistiques traditionnelles, qui passent par la caractérisation méta-linguistique des 19 « modes syllogistiques » valides.

Les utilisateurs des diagrammes logiques, et cela dès Euler lui-même, n'avaient probablement aucun doute quant à l'équivalence de la méthode des diagrammes et de la méthode des « modes concluants » d'Aristote, pour caractériser les raisonnements valides de la syllogistique. Toutefois, la démonstration rigoureuse de ce résultat est instructif à l'égard des fondements et des limites de la logique traditionnelle (=pré-frégeenne).

L'idée d'appliquer les méthodes classiques de la théorie de la démonstration afin d'étudier l'efficacité des diagrammes d'Euler pour capturer la syllogistique n'est pas nouvelle. On en trouve un exemple instructif, et qui nous a beaucoup inspiré, dans l'article de Koji Mineshima, Mitsuhiro Okada, Yuri Sato, et Ryo Takemura : « Diagrammatic Reasoning System with Euler Circles : Theory and Experiment Design », dans *Diagrammatic Representation and Inference*, Fifth International Conference, Lecture Notes in Computer Science, 2008 ; ou encore dans le livre de Sun-Joo Shin¹.

Nous avons deux types de motivation pour produire notre propre système formalisé (capturant la méthode diagrammatique) et nos propres preuves d'équivalence d'une telle méthode diagrammatique par rapports aux méthodes usuelles de la syllogistique.

Premièrement, nous ne voulions pas, comme Mineshima et al., ou comme Sun-Joo Shin, produire des preuves de cohérence et d'adéquation de la méthode syllogistique à l'égard d'une sémantique ensembliste, mais plutôt une preuve d'équivalence *relativement aux méthodes usuelles (non-diagrammatiques) de la syllogistique*. Ainsi, pour nous, il n'est pas question de comparer les résultats obtenus par des règles syntaxiques vis-à-vis d'une sémantique, mais nous orientons plutôt notre approche sur une comparaison entre preuves diagrammatiques et preuves non-diagrammatiques.

Deuxièmement, nous voulions éviter une des particularités du système de Mineshima et al. : ils emploient systématiquement, dans leurs démonstrations diagrammatiques, des règles d'effacement des patates², afin de maintenir à deux le nombre de patates sur les diagrammes. Ainsi, une fois qu'ils ont exploité une certaine patate, comme moyen terme d'un syllogisme, ils l'effacent. Leur motivation semble être la suivante. Une proposition est exprimée par la relation entre deux patates (sujet - prédicat). Si on veut mimer avec des diagrammes les preuves plus classiques de la syllogistique, qui partent d'un système de propositions qui sont les prémisses, et parviennent à une proposition-conclusion, alors on doit parvenir à ne manipuler essentiellement que des diagrammes à deux patates. C'est pourquoi les diagrammes à trois patates ne jouent qu'un rôle transitoire dans le système GDS de Mineshima et al.

1. *The Logical Status of Diagrams*, Cambridge University Press, 1994.

2. Ici, comme par la suite, nous utilisons le terme de « patate », courant dans le contexte de l'enseignement des diagrammes logiques en France. Ce terme, pour désigner les formes aux contours irréguliers des diagrammes de types eulériens, a l'avantage de pointer un aspect épistémologique essentiel : l'indépendance de la forme exacte de ces diagrammes à l'égard de la signification qu'ils véhiculent. Chez Euler lui-même, cependant, les diagrammes n'étaient pas encore « patatoïdes », mais plutôt à base de « figures rondes ».

En ce qui nous concerne, nous voulions au contraire marquer la différence entre les preuves usuelles (non-diagrammatiques) et les preuves diagrammatiques pour la syllogistique. En particulier, nous voulions mettre en avant ce que nous avons appelé dans notre article principal « le caractère quasi-synoptique » de la méthode diagrammatique. Il était donc important pour nous de transcrire l'idée de synthétiser sur un seul et même diagramme *toutes* les informations incluses dans un jeu de prémisses, et non pas uniquement de parvenir à *une* seule proposition conclusive, comme dans la syllogistique traditionnelle. Le travail de Sun-Joo Shin, auquel nous avons eu accès après la rédaction de notre article, va dans le même sens que notre propre approche de ce point de vue. (Mais dans le cadre d'une sémantique ensembliste)

Ce caractère quasi-synoptique de la méthode diagrammatique eulérienne trouve son expression la plus claire dans nos théorèmes qui montrent que le diagramme *maximal* répondant à un jeu de prémisses, donne à voir en lui *la totalité* des propositions démontrables syllogiquement à partir des prémisses, et uniquement elles.

2 Premières définitions

2.1 Graphes

Définition 1 (Patate eulérienne). *Une patate eulérienne P est une courbe plane simple dans le plan \mathbb{R}^2 qui délimite un intérieur et un extérieur (elle vérifie le théorème de Jordan). Par abus, on parlera indifféremment de la « patate » pour parler de la courbe elle-même ou, plus souvent, pour parler de la zone intérieure qu'elle délimite.*

Définition 2 (Diagramme eulérien). *Un diagramme eulérien est la donnée de n patates tracées dans le plan, ou dans une zone rectangle du plan.*

Définition 3 (1-zone). *Une 1-zone d'un diagramme eulérien, est ou bien l'intérieur d'une patate, ou bien son extérieur. On notera :*

$$P \text{ et } \mathbb{C}P, \text{ ou parfois } 1.P \text{ et } 0.P$$

les 1-zones respectivement intérieure et extérieure à la patate P . On notera :

$$\epsilon.P$$

lorsqu'on veut parler ou bien de P ou bien de $\mathbb{C}P$, sans préciser quel est le cas dont il s'agit. (sous-entendu : ϵ vaut 0 ou 1). Alors la zone complémentaire de la précédente sera : $(1 - \epsilon).P$.

Définition 4 (i-zone). *Soit \mathcal{D} un diagramme eulérien à n patates. Soit un entier $i \leq n$. Une i -zone de \mathcal{D} est l'intérieur d'un sous-ensemble du plan du type :*

$$\epsilon_1 P_1 \cap \dots \cap \epsilon_i P_i,$$

où $\{P_1, \dots, P_i\}$ est inclus dans l'ensemble des patates du diagramme. Une n -zone sera appelée aussi « zone élémentaire » du diagramme. On emploiera le mot « zone », tout court, pour désigner n'importe quelle réunion de zones élémentaires du diagrammes.

Remarquons qu'il y a au maximum 2^n zones élémentaires représentées sur un diagramme eulérien.

Définition 5 (Graphe arachnéen). *Un graphe arachnéen (en anglais spider graph) est un moyen graphique de délimiter une zone d'un diagramme eulérien. On l'utilise pour signifier qu'il y a au moins un individu dans la zone délimitée. C'est une idée issue de Peirce. Typiquement : on place un astérisque à l'intérieur de chaque zone élémentaire du diagramme qui appartient à la zone que l'on veut délimiter, et on relie tous ces astérisques entre eux par un graphe connexe d'arêtes (segments). Une zone peut contenir plusieurs astérisques, chacune faisant partie d'un graphe différent. On pourrait de manière équivalente colorier les zones que l'on veut indiquer comme non-vides (comme on le fait parfois lors de l'emploi pédagogique des diagrammes eulériens). Mais il faut alors supposer que l'on dispose d'un nombre de couleurs de coloriage indéfiniment grand, et que l'on peut faire se superposer les couleurs à volonté.*

Définition 6 (Diagramme eulérien généralisé). *On appelle « diagramme eulérien généralisé », la donnée d'un diagramme eulérien muni (d'un nombre fini) de graphes arachnéens. Dans la suite de ce document tout diagramme eulérien sera de type « généralisé », sans qu'il soit nécessaire de l'indiquer explicitement.*

2.2 Description de diagramme

Une « description de diagramme » (certains auteurs parlent de « diagramme abstrait ») est la donnée d'un ensemble de formules ensemblistes qui résument toutes les informations pertinentes d'un diagramme eulérien. Quand on trace un diagramme, le nombre de patates, mais non pas leurs formes exactes, a une importance. Pour décrire un diagramme, on commencera par se donner un ensemble \mathcal{P} de noms, qui sont associées, un à un, avec les patates. Par exemple, on prendra $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$ ou plus généralement $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$. Notons \mathcal{Z}_e la liste des 2^n formules du type $\epsilon_1 P_1 \cap \dots \cap \epsilon_n P_n$, qui décrivent les zones élémentaires d'un diagramme à n patates.

Ensuite, les seules informations susceptibles d'être pertinentes sont :

- Les relations d'inclusion, d'exclusion ou d'intersection qu'entretiennent les i -zones entre elles³. Cela revient à préciser, parmi les 2^n éléments de \mathcal{Z}_e , ceux qui sont effectivement représentés sur le diagramme, et ceux qui sont « manquants », i.e. inapparaissants sur le diagramme.
- La liste exhaustive de tous les sous-ensembles de \mathcal{Z}_e qui correspondent chacun à une zone exactement recouverte par un graphe arachnéen. Cette liste sera donc exprimée par un élément de l'ensemble des parties de \mathcal{Z}_e .

Ainsi, au final, une « description explicite de diagramme » sera la donnée $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ ⁴ d'un ensemble fini \mathcal{P} de noms de patates; d'un ensemble $\mathcal{V} \subset \mathcal{Z}_e$ de formules désignant les zones élémentaires manquantes (vides sur le diagramme); enfin, d'un ensemble \mathcal{E} constitués d'ensembles de formules de \mathcal{Z}_e ; chaque élément de \mathcal{E} désignant la portée d'un des graphes arachnéens.

Définition 7 (Satisfaction exacte). *On dira qu'un diagramme \mathcal{D} satisfait exactement la description explicite $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$, si toutes ses patates sont nommées par un nom de \mathcal{P} , si les zones élémentaires manquantes sur le diagramme sont exactement celles qui sont décrites par les formules de \mathcal{V} , si pour tout $Z \in \mathcal{E}$, il y a un graphe sur le diagramme qui s'étend exactement sur la zone Z , et s'il n'y a pas d'autres graphes arachnéens que ceux-ci.*

Remarquons que si une description explicite de diagramme est telle que, pour un certain $Z \in \mathcal{E}$, une des zones élémentaires figurant dans Z est par ailleurs dans \mathcal{V} , alors il n'est pas possible de trouver

3. En toute rigueur, les modes syllogistiques, en tant que tels, ne s'intéressent qu'aux relations entre deux patates, donc uniquement aux 2-zones. C'est ce qui fait la pauvreté de cette logique par rapport à l'algèbre booléenne dans toute son extension. Cependant, il est utile d'exprimer des résultats plus généraux sur les i -zones. Il faut également préciser que, dans la tradition scolastique, outre les modes concluants, on pouvait utiliser des définitions notionnelles (du type « L'homme est animal rationnel »), permettant d'exprimer certaines relations faisant intervenir plus de deux termes.

4. Nous prenons \mathcal{P} pour « patate », \mathcal{V} pour « vide », et \mathcal{E} pour « existence (d'individus) ».

un diagramme qui réponde à cette description. Il faudrait pour cela dessiner un graphe arachnéen dont un des astérisques devrait figurer à l'intérieur d'une zone élémentaire qui n'apparaît pas (!) On dira alors qu'une telle description est *inconsistante*. Si on est dans le cas contraire et si, en outre, aucun des $Z \in \mathcal{E}$ n'est l'ensemble vide, on dira que la description est *consistante*, et on pourra alors construire un graphe qui la satisfait.

Nous supposons sans le démontrer le lemme suivant :

Lemme 1. *Pour toute description explicite de diagramme : $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$, on peut tracer un diagramme qui la satisfait exactement.*

Démonstration. Nous ne donnons pas la preuve complète de ce lemme. Dans notre article principal, nous rappelons les méthodes de Venn et d'autres auteurs, pour construire un diagramme avec un nombre n quelconque de patates dessinant toutes les 2^n zones élémentaires de l'algèbre de Boole libre correspondante (i.e. c'est le cas particulier où $\mathcal{V} = \emptyset$). Les patates en question sont dessinées par l'intermédiaire de courbes oscillant à différentes périodes (cf. notre article pour les détails). Pour démontrer notre lemme, il s'agirait de montrer qu'on peut modifier les oscillations en question pour parvenir à proposer des diagrammes d'Euler pouvant satisfaire n'importe quelle demande exprimée par un $\mathcal{V} \neq \emptyset$. Le dessin de graphes arachnéens ne pose alors aucun problème particulier. \square

Exemples. Le diagramme qui représente la proposition « Tous les A sont B » est décrit par :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{A, B\} \\ \mathcal{V} &= \{A \cap \complement B\} \\ \mathcal{E} &= \emptyset\end{aligned}$$

Le fait que la zone $A \cap \complement B$ n'apparaisse pas sur un diagramme répondant à cette description se notera simplement : $A \cap \complement B = \emptyset$.

Le diagramme le plus général qui représente la proposition « Quelque A est B » est décrit par :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{A, B\} \\ \mathcal{V} &= \emptyset \\ \mathcal{E} &= \{\{A \cap B\}\}\end{aligned}$$

On notera « $\odot \rightarrow A \cap B$ » le fait de trouver dans un diagramme un graphe arachnéen dont la portée est exactement $A \cap B$. Nous distinguerons cela de la notation « $\odot \subset A \cap B$ » qui signifiera : « il y a un graphe arachnéen dont la portée est incluse dans $A \cap B$ ».

Toutefois, on se gardera bien d'écrire « $A \cap B \neq \emptyset$ » au lieu de « $\odot \rightarrow A \cap B$ ». Une telle notation serait trompeuse. En effet, avec de telles notations, un diagramme pourrait ne vérifier ni $A \cap B \neq \emptyset$ ni $A \cap B = \emptyset$. Ce serait le cas pour tout un diagramme où la zone $A \cap B$ apparaît sans qu'un graphe arachnéen n'y soit inclus.

Dernier exemple. Le diagramme le plus général qui représente à la fois :

- « Quelque A est B »,
- « Tous les B sont C et »
- « Quelque C ne sont pas A »

est décrit par :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{A, B, C\} \\ \mathcal{V} &= \{A \cap B \cap \complement C, \complement A \cap B \cap \complement C\} \\ \mathcal{E} &= \{\{A \cap B \cap C\}, \{\complement A \cap B \cap C\}\}\end{aligned}$$

Remarque : on prend pour acquis que l'ordre entre les termes ensemblistes reliés par le symbole \cap est indifférent.

Définition 8 (inclusion formelle). *Soit I une formule décrivant une i -zone et J une formule décrivant une j -zone avec $j \leq i$. On dira que la i -zone est formellement incluse dans la j -zone, si toutes les 1-zones qui apparaissent dans l'écriture de J apparaissent aussi dans l'écriture de I .*

Définition 9 (Description implicite). *On appellera « description implicite » d'un diagramme la donnée $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ d'un ensemble fini $\mathcal{P} = P_1, \dots, P_n$ de noms de patates; et de deux ensembles \mathcal{V} et \mathcal{E} de formules décrivant des i -zones (le i pouvant différer d'une formule à l'autre). Si toutes les formules de \mathcal{V} et de \mathcal{E} sont binaires, i.e. du type $\epsilon P \cap \epsilon' P'$, on dira qu'il s'agit d'une description implicite binaire.*

Scolie 1. *Notez bien que, dans notre définition d'une description explicite de diagramme, \mathcal{E} est un ensemble d'ensembles de formules, alors que dans notre définition d'une description implicite de diagramme, ce n'est qu'un simple ensemble de formules.*

Définition 10 (Zone implicitement vide dans une description implicite). *On dira qu'une zone élémentaire est implicitement vide dans la description implicite de diagramme $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$, si elle est formellement incluse à l'intérieur d'une formule de \mathcal{V} .*

Plus généralement, on dira qu'une certaine zone Z est implicitement vide dans $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ si chacune des zones élémentaires qui la composent formellement est implicitement vide.

Par contraste, on dira qu'une zone est explicitement vide pour signifier qu'elle est donnée par une formule qui figure directement dans \mathcal{V} . Notre définition est telle que les formules explicitement vides sont comptées parmi celles qui sont implicitement vides.

Lemme 2. *Si une formule $Z = \epsilon_1 P_1 \cap \dots \cap \epsilon_i P_i$ de i -zone est implicitement vide dans $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$, alors toute formule de j -zone qui est formellement incluse dans Z sera elle-aussi implicitement vide dans $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$.*

Démonstration. Cela découle immédiatement de la définition précédente. □

Définition 11 (Zone contenant implicitement un graphe arachnéen dans une description implicite). *On dira qu'une certaine zone Z (ou plus précisément, la formule qui la décrit) contient implicitement un graphe arachnéen dans la description implicite de diagramme $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$, s'il existe une formule Z' de \mathcal{E} telle que toutes les zones élémentaires qui composent formellement Z' sont ou bien implicitement vides, ou bien sont formellement incluses dans Z . Par contraste, on dira qu'une zone contient explicitement un graphe arachnéen, si elle est donnée par une formule qui figure directement dans \mathcal{E} .*

Définition 12 (Diagramme satisfaisant une description implicite). *On dira qu'un diagramme \mathcal{D} satisfait la « description implicite » $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ si toutes ses patates sont nommées dans \mathcal{P} , si aucune des zones élémentaires implicitement vides dans $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ n'apparaît sur \mathcal{D} , et si pour chaque $Z \in \mathcal{E}$, il y a un graphe arachnéen dont la portée est incluse dans la zone représentée par Z .*

Lemme 3. *Un diagramme satisfait à la fois aux descriptions implicites $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ et $(\mathcal{P}', \mathcal{V}', \mathcal{E}')$ si et seulement il satisfait à $(\mathcal{P} \cup \mathcal{P}', \mathcal{V} \cup \mathcal{V}', \mathcal{E} \cup \mathcal{E}')$.*

Définition 13 (Explicitation d'une description de diagramme). *Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ une description implicite de diagramme. On lui associe une unique description explicite de diagramme $(\mathcal{P}, \mathcal{V}', \mathcal{E}')$ comme suit.*

On place dans \mathcal{V}' toutes les zones élémentaires qui sont implicitement vides dans $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$.

Puis, pour chaque (description de) i -zone $Z \in \mathcal{E}$, on place dans \mathcal{E}' l'ensemble des zones élémentaires qui sont formellement incluses dans Z et qui ne sont pas éléments de \mathcal{V}' .

S'il advient que la description explicite qui correspond à une description implicite est telle que $\emptyset \in \mathcal{E}'$, alors on dira naturellement que la description implicite était *inconsistante*.

Définition 14 (Satisfaction exacte, diagramme maximal). *On dira qu'un diagramme \mathcal{D} satisfait exactement la description implicite consistante $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$, ou qu'il est le diagramme maximal qui la satisfait, si c'est un diagramme qui satisfait exactement (au sens de la def. 7) la description explicite de diagramme qui est associée à $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$.*

On voit que le diagramme maximal est uniquement déterminé, à isomorphisme de diagramme près. La maximalité du diagramme doit se comprendre au sens où c'est le diagramme qui représente la situation la plus générale possible, compatible avec les contraintes exprimées par \mathcal{V} et \mathcal{E} . Sur le diagramme maximal, on pourra avoir deux graphes arachnéens G et G' , tels que la portée de G soit strictement incluse dans la portée de G' . Si tel est le cas, on pourra supprimer G et obtenir un diagramme qui contiendra les mêmes informations logiques que le précédent. A partir du diagramme maximal, on peut donc supprimer tous les graphes arachnéens superflus de ce type. On obtient un diagramme qui comporte les mêmes informations logiques que le diagramme maximal; et qu'on peut continuer à appeler « le diagramme maximal » par abus de langage.

2.3 Démonstration syllogistique, consistance et inconsistance (au sens de la syllogistique) d'un ensemble de propositions.

Dans toute cette section, les propositions considérées ont la forme aristotélicienne habituelle « S est P », qui se décline selon les quatre types A, E, I et O du carré logique de Boèce (selon les dénominations latines).

On va considérer successivement deux versions de la syllogistique.

Première version de la syllogistique Dans la première version, les propositions universelles n'ont pas de portée existentielle. Cela signifiera que l'on ne pourra pas déduire « Quelque A est B » de « Tous les A sont B ».

- Les règles syllogistiques permises, dans cette première version, seront alors réduites à :
- les syllogismes en Barbara, ou Céarent, Cesare, Camestres ou Camenes; i.e. les modes syllogistiques où les trois énoncés sont universels.
 - les syllogismes en Darii, Ferio, Festino, Baroco, Datisi, Disamis, Bocardo, Dimatis ou Fresison; i.e. les modes syllogistiques où une prémisse est universelle et l'autre particulière (la conclusion est alors nécessairement particulière).
 - les conversions simples de propositions de type E ou I.
 - (*règle spéciale n°1*) à partir de deux propositions du type « Tous les A sont B » et « Aucun A n'est B », on peut déduire n'importe quelle proposition universelle dont A est le sujet. (Cas où A est d'extension vide).
 - (*règle spéciale n°2*) on peut déduire « Quelque A est B » (resp. Quelque A n'est pas B) de « Tous les A sont B » (resp. Aucun A n'est B) à condition que nous ayons déjà obtenu une proposition particulière dont A est le sujet.

Les deux dernières règles, plus compliquées, sont indispensables tant qu'on est dans la première version de la syllogistique. Cela se simplifiera dans la seconde version.

Lemme 4. *Dans la syllogistique –première version–, telle que nous venons de la définir, on peut appliquer les autres syllogismes (Barbari, Darapti, Felapton, Fesapo, Celaront, Cesaro, Camestros, Calemos) à condition qu'on dispose (outre des prémisses), d'une proposition particulière dont le sujet est le même que pour la conclusion à laquelle on veut aboutir. Il s'agit, par cette condition supplémentaire, de se prémunir contre la possibilité d'une notion d'extension vide.*

Définition 15 (Démonstration syllogistique). *Une démonstration syllogistique est une suite d'énoncés dont les premiers sont des énoncés de départ (prémisses) et dont tous les autres énoncés sont obtenus par application des règles à partir d'énoncés précédents. On dit qu'une proposition β est conséquence des propositions $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ par la méthode syllogistique –première version–, si il existe une démonstration syllogistique partant des prémisses $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ et parvenant à β .*

Définition 16 (inconsistance d'un ensemble de propositions). *Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ une liste de k propositions. On dit qu'elles sont inconsistantes entre elles si, à partir de ces propositions on peut prouver successivement :*

- ou bien deux propositions de types : « Tous les A sont B » et « Quelque A n'est pas B » ;
- ou bien deux propositions de types : « Aucun A n'est B » et « Quelque A est B ».

Seconde version de la syllogistique Dans la seconde version de la syllogistique (qui est plus conforme aux habitudes d'Aristote), les énoncés universels ont une portée existentielle. Cela veut dire que le passage de « Tous les A sont B » à « Quelque A est B », ou de « Aucun A n'est B » à « Quelque A n'est pas B » (affaiblissement de la quantité d'une proposition) sont considérés comme logiquement valides. Cela revient à considérer que les notions primitives (i.e. celles qui correspondront aux patates dans la représentation diagrammatique) ne sont jamais d'extension vide.

Les règles syllogistiques permises, dans cette seconde version, sont :

- toutes les règles déjà admises dans la première version (sauf la règle spéciale n°1 qui devient superflue) ;
- les règles d'affaiblissements de quantité sur des propositions universelles. Autrement dit, on peut appliquer la règle spéciale n°2 ci-dessus, mais sans avoir besoin de la clause conditionnelle qui termine l'énoncé.

La définition de l'inconsistance d'un ensemble de propositions reste la même.

Lemme 5. *Dans la syllogistique –seconde version–, on peut appliquer sans restriction les syllogismes du type Barbari, Darapti, Felapton, Fesapo, Celaront, Cesaro, Camestros et Calemos (syllogismes à deux prémisses universelles, et une conclusion particulière).*

2.4 Satisfaction de formules sur un diagramme

Définition 17 (Satisfaction de proposition par un diagramme). *On dira qu'un diagramme satisfait la formule « Tous les A sont B », s'il satisfait la description implicite $\{\{A, B\}, \{A \cap \complement B\}, \emptyset\}$. On dira aussi plus simplement qu'il satisfait : $A \cap \complement B = \emptyset$.*

On dira qu'un diagramme satisfait la formule « Aucun A n'est B », s'il satisfait la description implicite $\{\{A, B\}, \{A \cap B\}, \emptyset\}$. On dira aussi plus simplement qu'il satisfait : $A \cap B = \emptyset$.

Proposition : *Un diagramme satisfait « Aucun A n'est B » si et seulement si il satisfait « Aucun B n'est A ».*

On dira qu'un diagramme satisfait la formule « Quelque A est B », s'il satisfait la description implicite $\{\{A, B\}, \emptyset, \{A \cap B\}\}$. On dira aussi plus simplement qu'il satisfait : $\odot \subset A \cap B$.

Proposition : *Un diagramme satisfait « Quelque A est B » si et seulement si il satisfait « Quelque B est A ».*

On dira qu'un diagramme satisfait la formule « Quelque A n'est pas B », s'il satisfait la description implicite $\{\{A, B\}, \emptyset, \{A \cap \complement B\}\}$. On dira aussi plus simplement qu'il satisfait : $\odot \subset A \cap \complement B$.

3 Divers lemmes et définitions sur les descriptions implicites binaires

Théorème 1 (Transitivité n°1). *Soit \mathcal{D} un diagramme d'Euler (généralisé) qui satisfait à :*

1. $\epsilon P \cap \epsilon' P' = \emptyset$
2. $(1 - \epsilon') P' \cap \epsilon'' P'' = \emptyset$

alors il satisfait à $\epsilon P \cap \epsilon'' P'' = \emptyset$.

Démonstration. Sans perte de généralité, on pourra supposer que $\mathcal{D} = \{P_1, \dots, P_n\}$ avec $P = P_1$, $P' = P_2$, $P'' = P_3$.

1- L'hypothèse 1. signifie que toutes les zones élémentaires du type $\epsilon P \cap \epsilon' P' \cap \epsilon_3 P'' \dots \cap \epsilon_n P_n$ (où les $\epsilon_3, \dots, \epsilon_n$ sont quelconques) sont manquantes sur le diagramme.

2- L'hypothèse 2. signifie que toutes les zones élémentaires du type $\epsilon_1 P \cap (1 - \epsilon') P' \cap \epsilon'' P'' \cap \epsilon_4 P_4 \dots \cap \epsilon_n P_n$ (où les $\epsilon_1, \epsilon_4, \dots, \epsilon_n$ sont quelconques) sont manquantes sur le diagramme.

Considérons à présent une zone élémentaire quelconque du type $\epsilon P \cap \epsilon_2 P' \cap \epsilon'' P'' \cap \epsilon_4 P_4 \cap \dots \cap \epsilon_n P_n$. Si $\epsilon_2 = \epsilon'$, alors une telle zone n'apparaît pas sur le diagramme en vertu de l'étape 1-. Si, en revanche, $\epsilon_2 = (1 - \epsilon')$, alors c'est en vertu de 2- que cette zone est inapparaissante. Notre diagramme satisfait bien $\epsilon P \cap \epsilon'' P'' = \emptyset$. \square

Corollaire 1. *Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ une description implicite binaire d'un graphe. On note \mathcal{V}^* le plus petit ensemble de formules binaires (i.e. du type $\epsilon_i P_i \cap \epsilon_j P_j$) qui contienne \mathcal{V} , et qui soit stable par la loi :*

$$Si \epsilon_i P_i \cap \epsilon_j P_j \in \mathcal{V}^* \text{ et } (1 - \epsilon_j) P_j \cap \epsilon_k P_k \in \mathcal{V}^*, \text{ alors } \epsilon_i P_i \cap \epsilon_k P_k \in \mathcal{V}^*.$$

Tout diagramme satisfait $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ si et seulement si il satisfait $(\mathcal{P}, \mathcal{V}^, \mathcal{E})$.*

Corollaire 2. *Soit \mathcal{D} un diagramme qui satisfait à deux propositions universelles qui sont les prémisses d'un raisonnement en : Barbara, Céarent, Cesare, Camestres ou Camenes ; alors le diagramme satisfait à la proposition qui est la conclusion de ce raisonnement syllogistique.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que les prémisses de tels raisonnements s'expriment, sur le diagramme, par des conditions du type $\epsilon_i P_i \cap \epsilon_j P_j = \emptyset$ et $(1 - \epsilon_j) P_j \cap \epsilon_k P_k = \emptyset$, tandis que la conclusion est du type $\epsilon_i P_i \cap \epsilon_k P_k = \emptyset$. \square

Corollaire 3. *Si un diagramme satisfait à une liste (finie) de prémisses universelles, alors il satisfait à toutes les propositions qui sont obtenues par une succession de syllogismes (en Barbara, ou Céarent, Cesare, Camestres ou Camenes) à partir de ces prémisses. En fait l'ensemble \mathcal{V}^* défini ci-dessus, quand il est interprété propositionnellement, capture exactement toutes les propositions qui sont conséquences des prémisses par une succession de syllogismes des types indiqués.*

Remarquons que si aucune formule binaire de \mathcal{V} n'est du type $\mathbb{C}A \cap \mathbb{C}B$ (qui ne traduit aucune forme propositionnelle canonique chez Aristote, mais quelque chose comme « Aucun non-A n'est un non-B »), alors il n'y en a pas non plus dans \mathcal{V}^* .

Théorème 2 (Transitivité n°2). *Si un diagramme satisfait à $\epsilon P \cap \epsilon' P' = \emptyset$ et à $\odot \subset \epsilon' P' \cap \epsilon'' P''$, alors il satisfait à $\odot \subset (1 - \epsilon) P \cap \epsilon'' P''$.*

(2 bis) *Si un diagramme satisfait à $\epsilon P \cap \epsilon' P' = \emptyset$ et à $\odot \subset \epsilon P \cap \epsilon'' P''$, alors il satisfait à $\odot \subset \epsilon P \cap (1 - \epsilon') P'$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on pourra supposer que $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ avec $P = P_1$, $P' = P_2$, $P'' = P_3$.

1) Le fait que \mathcal{D} satisfait $\epsilon P \cap \epsilon' P' = \emptyset$ signifie que toutes les zones élémentaires du type $\epsilon P \cap \epsilon' P' \cap \epsilon_3 P'' \dots \cap \epsilon_n P_n$ (où les $\epsilon_3, \dots, \epsilon_n$ sont quelconques) sont manquantes sur le diagramme.

2) Le fait que \mathcal{D} satisfait à $\odot \subset \epsilon' P' \cap \epsilon'' P''$ signifie qu'il y a graphe arachnéen G dans \mathcal{E} dont la portée est incluse à l'intérieur de $\epsilon' P' \cap \epsilon'' P''$.

Considérons toutes les zones élémentaires couvertes par le graphe arachnéen G . Elles sont du type $\epsilon_1 P \cap \epsilon' P' \cap \epsilon'' P'' \cap \epsilon_4 P_4 \cap \dots \cap \epsilon_n P_n$. Puisque ces zones apparaissent sur le diagramme, elles ne sont pas du type $\epsilon P \cap \epsilon' P' \cap \epsilon_3 P'' \dots \cap \epsilon_n P_n$ (d'après 1)). Autrement dit, on n'a pas $\epsilon_1 = \epsilon$ mais plutôt $\epsilon_1 = 1 - \epsilon$. Finalement, les zones couvertes par G sont donc du type $(1 - \epsilon) P \cap \epsilon' P' \cap \epsilon'' P'' \cap \epsilon_4 P_4 \cap \dots \cap \epsilon_n P_n$. Ces zones étant formellement incluses dans $(1 - \epsilon) P \cap \epsilon' P'$, notre graphe satisfait bien à $\odot \subset (1 - \epsilon) P \cap \epsilon' P'$.

Le (bis) n'est pas plus difficile à démontrer. \square

Corollaire 4. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ une description implicite binaire d'un graphe. On note \mathcal{E}^* le plus petit ensemble de formules binaires qui contienne \mathcal{E} , et qui soit stable par les lois :

Si $\epsilon_i P_i \cap \epsilon_j P_j \in \mathcal{V}$ et $\epsilon_j P_j \cap \epsilon_k P_k \in \mathcal{E}^$, alors $(1 - \epsilon_i) P_i \cap \epsilon_k P_k \in \mathcal{E}^*$.*

Si $\epsilon P \cap \epsilon' P' \in \mathcal{V}$ et $\epsilon P \cap \epsilon'' P'' \in \mathcal{E}^$, alors $\epsilon P \cap (1 - \epsilon') P' \in \mathcal{E}^*$.*

Tout diagramme satisfait $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ si et seulement si il satisfait $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E}^)$.*

Corollaire 5. Soit \mathcal{D} un diagramme qui satisfait une proposition universelle et une proposition particulière qui sont les prémisses d'un raisonnement en : *Darii, Ferio, Festino, Baroco, Datisi, Disamis, Bocardo, Dimatis ou Fresison* ; alors le diagramme satisfait aussi la proposition qui est la conclusion de ce raisonnement syllogistique.

Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ un diagramme qui satisfait à deux propositions qui peuvent être les prémisses de notre règle spéciale n°2, alors notre diagramme satisfait à la proposition qui est la conclusion de cette règle.

Démonstration. Pour la première partie du corollaire, on vérifie que les modes syllogistiques correspondants s'expriment, sur le diagramme, par la première règle exprimée par le théorème. De même, on vérifie que la règle spéciale n°2 s'exprime, en termes diagrammatiques, par la partie (2bis) du théorème. \square

Corollaire 6. Soit \mathcal{D} un diagramme qui satisfait aux prémisses d'un raisonnement en *Barbari, Darapti, Felapton, Fesapo, Celaront, Cesaro, Camestros, Calemos*. Si ce diagramme est tel que la zone correspondant au sujet de la conclusion de ce raisonnement apparaît bien sur le diagramme, et contient intégralement un graphe arachnéen, alors la conclusion de ce raisonnement syllogistique est vérifiée sur le diagramme.

Théorème 3 (Transitivité n°3, première version). *Si un diagramme satisfait à $\epsilon P \cap \epsilon' P' = \emptyset$ et à $\epsilon P \cap (1 - \epsilon') P' = \emptyset$ alors, pour tout $\epsilon'' \in \{0, 1\}$ et tout $P'' \in \mathcal{P} \setminus \{P\}$, il satisfait à $\epsilon P \cap \epsilon'' P'' = \emptyset$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on pourra supposer que $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ avec $P = P_1$, $P' = P_2$.

La première hypothèse signifie que toutes les zones élémentaires du type $\epsilon P_1 \cap \epsilon' P_2 \cap \epsilon_3 P_3 \cap \dots \cap \epsilon_n P_n$ (où les $\epsilon_3, \dots, \epsilon_n$ sont quelconques) sont manquantes sur le diagramme. La seconde hypothèse dit la même chose pour les zones du type $\epsilon P_1 \cap (1 - \epsilon') P_2 \cap \epsilon_3 P_3 \cap \dots \cap \epsilon_n P_n$. Ainsi, il n'y a finalement

absolument aucune zone élémentaire formellement incluse dans ϵP_1 qui apparaisse sur le diagramme. En particulier, aucune des 2-zones $\epsilon P \cap \epsilon'' P''$ n'apparaît sur le diagramme. C.Q.F.D. \square

Corollaire 7. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ une description implicite binaire d'un graphe. On note \mathcal{V}^\dagger le plus petit ensemble de formules binaires qui contienne \mathcal{V} , et qui vérifie :

$$\text{Si } \epsilon_i P_i \cap \epsilon_j P_j \in \mathcal{V}^\dagger, \epsilon_i P_i \cap (1 - \epsilon_j) P_j \in \mathcal{V}^\dagger, \epsilon \in \{0, 1\} \text{ et } P \in \mathcal{P} \setminus \{P_i\}, \text{ alors } \epsilon_i P_i \cap \epsilon P \in \mathcal{V}^\dagger.$$

Tout diagramme satisfait $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ si et seulement si il satisfait $(\mathcal{P}, \mathcal{V}^\dagger, \mathcal{E})$.

Corollaire 8. Soit \mathcal{D} un diagramme qui satisfait aux propositions qui sont les prémisses de notre règle spéciale n°1 (cf. « première version de la syllogistique »). Alors il satisfait à la proposition qui est la conclusion de cette règle.

Corollaire 9. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ une description implicite binaire d'un graphe. On note \mathcal{V}^\heartsuit et \mathcal{E}^\heartsuit les plus petits ensembles de formules binaires qui vérifient :

1. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}^\heartsuit$
2. $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}^\heartsuit$
3. \mathcal{V}^\heartsuit est stable par la loi (transitivité n°1) :
Si $\epsilon P \cap \epsilon' P' \in \mathcal{V}^\heartsuit$ et $(1 - \epsilon') P' \cap \epsilon'' P'' \in \mathcal{V}^\heartsuit$, alors $\epsilon P \cap \epsilon'' P'' \in \mathcal{V}^\heartsuit$.
4. \mathcal{V}^\heartsuit et \mathcal{E}^\heartsuit sont stables par la loi (transitivité n°2) :
Si $\epsilon_i P_i \cap \epsilon_j P_j \in \mathcal{V}^\heartsuit$ et $\epsilon_j P_j \cap \epsilon_k P_k \in \mathcal{E}^\heartsuit$, alors $(1 - \epsilon_i) P_i \cap \epsilon_k P_k \in \mathcal{E}^\heartsuit$ (n°2)
et $(1 - \epsilon_i) P_i \cap \epsilon_j P_j \in \mathcal{E}^\heartsuit$ (n°2 bis).
5. \mathcal{V}^\heartsuit et \mathcal{E}^\heartsuit est stable par la loi (transitivité n°3 -première version-) : Si $\epsilon P \cap \epsilon' P' \in \mathcal{V}^\heartsuit$, $\epsilon P \cap (1 - \epsilon') P' \in \mathcal{V}^\heartsuit$, $\epsilon'' \in \{0, 1\}$, et $P'' \in \mathcal{P}$, alors $\epsilon P \cap \epsilon'' P'' \in \mathcal{V}^\heartsuit$.

Tout diagramme satisfait $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ si et seulement si il satisfait $(\mathcal{P}, \mathcal{V}^\heartsuit, \mathcal{E}^\heartsuit)$.

Remarque : Les lois de transitivité n°1 et n°3 ne font pas intervenir \mathcal{E}^\heartsuit . On peut donc commencer par les appliquer et définir \mathcal{V}^\heartsuit indépendamment de \mathcal{E}^\heartsuit . On applique alors la loi n°2 en dernier lieu, pour définir \mathcal{E}^\heartsuit .

Corollaire 10. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ un diagramme qui satisfait à une liste (finie) de propositions de type A, E, I ou O, qu'on appelle « prémisses ». Alors ce diagramme satisfait à toutes les propositions qui sont conséquences des prémisses par la méthode syllogistique –première version-. En fait les ensembles \mathcal{V}^\heartsuit et \mathcal{E}^\heartsuit définis ci-dessus, quand ils sont interprétés propositionnellement, capturent exactement toutes les propositions qui sont conséquences des prémisses par une succession de syllogismes –première version-.

Corollaire 11. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ la description implicite binaire de diagramme qui traduit un jeu $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de prémisses. Ce jeu de prémisses est consistant (par la méthode syllogistique -première version) si et seulement on ne peut trouver une même description de 2-zone qui apparaisse pas dans \mathcal{V}^\heartsuit et dans \mathcal{E}^\heartsuit .

Définition 18 (Diagramme à patates non triviales). On dira qu'un diagramme est « à patates non triviales » si, pour chaque patate $P \in \mathcal{P}$, il existe (au moins) deux zones élémentaires contenue respectivement dans P et dans $\mathbb{C}P$, qui ne sont pas manquantes sur le diagramme, et s'il y a deux graphes arachnéens dont les portées sont respectivement incluses dans P et dans $\mathbb{C}P$.

Exemple : soit un diagramme, décrit implicitement par $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ (avec $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$). Si la description implicite de graphe $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E} \cup \{\{P_1\}, \dots, \{P_n\}\} \cup \{\{\mathbb{C}P_1\}, \dots, \{\mathbb{C}P_n\}\})$ est consistante, alors elle est la description d'un diagramme « à patates non triviales ».

Théorème 4 (Transitivité n°3, seconde version). Soit un diagramme à patates non triviales qui satisfait à $\epsilon P \cap \epsilon' P' = \emptyset$, alors il satisfait à $\odot \subset (1 - \epsilon) P \cap \epsilon' P'$ et à $\odot \subset \epsilon P \cap (1 - \epsilon') P'$.

Démonstration. Sans perte de généralité, on pourra supposer que $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ avec $P = P_1$, $P' = P_2$.

1) Puisque la patate P apparaît sur le diagramme, et que cette patate est non triviale, il doit exister sur le diagramme des zones élémentaires du type $\epsilon P \cap \epsilon_2 P' \cap \dots \cap \epsilon_n P_n$, et un graphe arachnéen dont la portée est incluse dans ces zones. Or, comme $\epsilon P \cap \epsilon' P' = \emptyset$, on aura nécessairement $\epsilon_2 = (1 - \epsilon')$. Le graphe aura donc sa portée dans $\epsilon P \cap (1 - \epsilon') P'$. On a bien $\odot \subset (1 - \epsilon) P \cap \epsilon' P'$.

2) La seconde proposition se traite exactement comme la première, ou s'en déduit par la symétrie de l'opérateur \cap . \square

Corollaire 12. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ une description implicite binaire d'un graphe. On note \mathcal{E}^\dagger le plus petit ensemble de formules binaires qui contienne \mathcal{E} , et qui soit stable par la loi :

$$\text{Si } \epsilon_i P_i \cap \epsilon_j P_j \in \mathcal{V} \text{ alors } (1 - \epsilon_i) P_i \cap \epsilon_j P_j \in \mathcal{E}^\dagger \text{ et } \epsilon_i P_i \cap (1 - \epsilon_j) P_j \in \mathcal{E}^\dagger.$$

Tout diagramme à patates non triviales satisfait à $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ si et seulement si il satisfait $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E}^\dagger)$.

Corollaire 13. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ un diagramme à patates non triviales. S'il satisfait à une proposition du type « Tous les A sont B », alors il satisfait à « Quelque A est B ». S'il satisfait à une proposition du type « Aucun A n'est B », alors il satisfait à « Quelque A n'est pas B ». Autrement dit, notre diagramme satisfait à toutes les propositions qui sont obtenues à partir de propositions satisfaites par « affaiblissement de la quantité ».

Démonstration. Il suffit de vérifier que de tels affaiblissements de la quantité, sur le diagramme, s'expriment par une transformation du type de celle qui est décrite dans le théorème. \square

Corollaire 14. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ un diagramme à patates non triviales qui satisfait à deux propositions universelles qui sont les prémisses d'un raisonnement en : Barbari, Darapti, Felapton, Fesapo, Celaront, Cesaro, Camestros ou Calemos. Alors le diagramme satisfait aussi à la proposition qui est la conclusion de ce syllogisme.

Démonstration. 1) Cas de Barbari, Celaront, Camestrop, Cesaro, Calemos.

Tous ces syllogismes ont en commun d'avoir une conclusion qui est l'affaiblissement quantitatif de la conclusion d'un raisonnement dont les trois propositions sont universelles (Barbara pour Barbari, Celarent pour Celaront, etc.). On applique alors successivement les corollaires 2 et 13.

2) Cas de Darapti, Felapton, Fesapo.

La démonstration se ferait de façon similaire pour ces 3 cas. Prenons Darapti.

Soit un diagramme à patates non triviales qui satisfait à la fois à « Tous les A sont B » et à « Tous les A sont C ». Montrons qu'il satisfait à « Quelque B est C ». Par le corollaire 13, ce diagramme satisfait à « Quelque A est B » donc à « Quelque B est A ». Puisqu'il satisfait à « Quelque B est A » et à « Tous les A sont C » alors, par le corollaire 5, il satisfait à « Quelque B est C », qui est la conclusion d'un raisonnement en Darii. \square

Corollaire 15. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ une description implicite binaire d'un graphe. On note \mathcal{V}^\clubsuit et \mathcal{E}^\clubsuit les plus petits ensembles de formules binaires qui vérifient :

1. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}^\clubsuit$
2. $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}^\clubsuit$

3. \mathcal{V}^\clubsuit est stable par la loi (transitivité n°1) :
Si $\epsilon P \cap \epsilon' P' \in \mathcal{V}^\clubsuit$ et $(1 - \epsilon')P' \cap \epsilon'' P'' \in \mathcal{V}^\clubsuit$, alors $\epsilon P \cap \epsilon'' P'' \in \mathcal{V}^\clubsuit$.
4. \mathcal{E}^\clubsuit est stable par la loi (transitivité n°2) :
Si $\epsilon P \cap \epsilon' P' \in \mathcal{V}^\clubsuit$ et $\epsilon' P' \cap \epsilon'' P'' \in \mathcal{E}^\clubsuit$, alors $(1 - \epsilon)P \cap \epsilon'' P'' \in \mathcal{E}^\clubsuit$.
5. \mathcal{E}^\clubsuit est stable par la loi (transitivité n°3, seconde version) : Si $\epsilon P \cap \epsilon' P' \in \mathcal{V}^\clubsuit$, alors $(1 - \epsilon)P \cap \epsilon' P' \in \mathcal{E}^\clubsuit$ et $\epsilon P \cap (1 - \epsilon')P' \in \mathcal{E}^\clubsuit$.

Tout diagramme à patates non triviales satisfait à $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ si et seulement si il satisfait à $(\mathcal{P}, \mathcal{V}^\clubsuit, \mathcal{E}^\clubsuit)$.

Scolie 2. On pourrait montrer facilement que l'on a toujours $\mathcal{E}^\heartsuit \subseteq \mathcal{E}^\clubsuit$ et $\mathcal{V}^\heartsuit \subseteq \mathcal{V}^\clubsuit$.

Corollaire 16. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ un diagramme à patates non triviales qui satisfait à une liste (finie) de propositions de type A, E, I ou O, qu'on appelle « prémisses ». Alors ce diagramme satisfait à toutes les propositions qui sont conséquences des prémisses par la méthode syllogistique –seconde version. En fait, les ensembles \mathcal{V}^\clubsuit et \mathcal{E}^\clubsuit définis ci-dessus, quand ils sont interprétés propositionnellement, capturent exactement toutes les propositions qui sont conséquences des prémisses par une succession de syllogismes (au sens de la seconde version de la méthode syllogistique).

Corollaire 17. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ la description implicite binaire de diagramme qui traduit un jeu $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de prémisses. Ce jeu de prémisses est consistant (par la méthode syllogistique –seconde version–) si et seulement si la même description de 2–zone n'apparaît pas dans \mathcal{V}^\clubsuit et dans \mathcal{E}^\clubsuit .

Corollaire 18. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ une description implicite binaire de diagramme telle que la même description de 2–zone n'apparaît pas dans \mathcal{V}^\clubsuit et dans \mathcal{E}^\clubsuit . Alors $\mathcal{V}^\clubsuit = \mathcal{V}^\heartsuit$.

Démonstration. L'ensemble de formules \mathcal{V}^\heartsuit est défini par une clause supplémentaire par rapport à \mathcal{V}^\clubsuit , à savoir ce que nous avons appelé « loi de transitivité n°3, première version ». Pour montrer que $\mathcal{V}^\clubsuit = \mathcal{V}^\heartsuit$, il nous suffit donc de prouver que \mathcal{V}^\clubsuit est également stable à l'égard de cette loi de transitivité. C'est-à-dire qu'on doit montrer que si $\epsilon P \cap \epsilon' P' \in \mathcal{V}^\clubsuit$, $\epsilon P \cap (1 - \epsilon')P' \in \mathcal{V}^\clubsuit$, $\epsilon'' \in \{0, 1\}$, et $P'' \in \mathcal{P}$, alors $\epsilon P \cap \epsilon'' P'' \in \mathcal{V}^\clubsuit$.

Mais l'antécédent de cette implication ne peut jamais être vrai. En effet, si on a $\epsilon P \cap \epsilon' P' \in \mathcal{V}^\clubsuit$, alors on a $\epsilon P \cap (1 - \epsilon')P' \in \mathcal{E}^\clubsuit$ par la loi de transitivité n°3 –seconde version– (cf. corollaire 15), et donc il n'est pas possible d'avoir aussi $\epsilon P \cap (1 - \epsilon')P' \in \mathcal{V}^\clubsuit$ par hypothèse. \square

Scolie 3. On comprend le sens de notre appellation : loi de transitivité n°3 « seconde version ». En fait, la loi –première version– est impliquée par la loi –seconde version– (et par l'hypothèse de consistence). D'autre part, ce corollaire nous permet de voir que la seconde version de la méthode syllogistique permet de démontrer plus de propositions particulières que la première version, mais elle démontre les mêmes propositions universelles.

4 Équivalence entre les méthodes diagrammatiques et les méthodes usuelles de la syllogistique.

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ une liste de k propositions (de type A, E, I ou O) reliant 2 à 2 des notions qu'on nommera (tout comme les patates qui les représenteront) : P_1, \dots, P_n . On traduit cette liste de propositions (comme expliqué dans la section précédente) en une description implicite binaire de graphe $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$. Supposons qu'on parvienne à construire un diagramme \mathcal{D} qui satisfasse *maximalement* à $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$. Un tel diagramme, par définition, est unique à isomorphisme près (seule son existence est sujette à caution). On dira qu'une certaine proposition β est une conséquence des propositions

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ par la méthode diagrammatique, si \mathcal{D} satisfait β . Autrement dit, notre *démonstration diagrammatique* consistera en une procédure par laquelle on construit un graphe vérifiant maximale-ment toutes les prémisses, puis on vérifie si la conclusion du raisonnement peut être effectivement lue sur ce diagramme.

De façon similaire aux deux versions de syllogistique présentées ci-dessus, il y aura deux versions de la méthode diagrammatique. La première version est celle que nous venons de décrire à l'instant. Dans la seconde version, après avoir construit le diagramme décrit précédemment, on doit vérifier que, pour chaque patate P , il existe au moins une zone élémentaire incluse dans P , et une zone élémentaire incluse dans $\mathbb{C}P$ (sans quoi, on considère notre jeu de prémisses comme inconsistant). Si c'est bien le cas, alors on ajoute des graphes arachnéens qui recouvre exactement chacune des zones : $P_1, \dots, P_n, \mathbb{C}P_1, \dots, \mathbb{C}P_n$. Le graphe ainsi obtenu est donc « à patates non triviales ». On lit ensuite les propositions conclusions sur le diagramme, comme dans la version précédente.

Lemme 6. *Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ une description implicite binaire de diagramme. Soit $\epsilon_1 P_1 \cap \dots \cap \epsilon_k P_k$ la formule d'une k -zone ($2 \leq k \leq n$) qui n'est formellement incluse dans aucune formule de \mathcal{V}^\heartsuit . Alors, elle n'est pas implicitement vide dans $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$.*

Démonstration. Soit $H(k)$ la proposition, dépendant de l'entier $2 \leq k \leq n$: « toute formule de k -zone (pour un certain $2 \leq k \leq n$) qui n'est formellement incluse dans aucune 2-zones de \mathcal{V}^\heartsuit n'est pas implicitement vide sur $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ ».

On va démontrer par une récurrence décroissante sur l'entier k que $H(k)$ vaut pour tout k entre 2 et n .

L'initialisation de la récurrence est immédiate puisque $H(n)$ se réduit à la définition d'une formule élémentaire implicitement vide.

Supposons par récurrence que nous ayons $H(k)$ pour un certain $2 \leq k \leq n$. Déduisons-en alors que nous avons $H(k-1)$.

On prend donc une $(k-1)$ -zone $\epsilon_1 P_1 \cap \dots \cap \epsilon_{(k-1)} P_{(k-1)}$ qui n'est formellement incluse dans aucune formule de \mathcal{V}^\heartsuit . On cherche à montrer qu'elle n'est pas implicitement vide dans $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$.

On considère la patate P_k qui ne figure pas encore dans la précédente formule, et on construit la k -zone $\epsilon_1 P_1 \cap \dots \cap \epsilon_{(k-1)} P_{(k-1)} \cap P_k$. Si cette k -zone n'est formellement incluse dans aucune formule de \mathcal{V}^\heartsuit alors, par application de notre hypothèse de récurrence, elle ne sera pas implicitement vide. La contraposée du lemme 2 permet alors de conclure.

Supposons alors, au contraire, que la formule $\epsilon_1 P_1 \cap \dots \cap \epsilon_{(k-1)} P_{(k-1)} \cap P_k$ est bel et bien formellement incluse dans une formule de \mathcal{V}^\heartsuit . Cela n'est possible, étant donné notre hypothèse sur la $(k-1)$ -zone initiale, que s'il existe un certain $1 \leq i \leq (k-1)$ tel que $\epsilon_i P_i \cap P_k \in \mathcal{V}^\heartsuit$. Dans ce cas, on considère plutôt la k -zone : $\epsilon_1 P_1 \cap \dots \cap \epsilon_{(k-1)} P_{(k-1)} \cap \mathbb{C}P_k$. Serait-il possible qu'à son tour cette formule de k -zone soit formellement incluse dans une 2-zone de \mathcal{V}^\heartsuit ? Non, ce n'est pas possible. En effet, dans le cas contraire, il y aurait un certain $1 \leq j \leq (k-1)$ tel que $\epsilon_j P_j \cap \mathbb{C}P_k \in \mathcal{V}^\heartsuit$. On serait alors amenés à considérer deux cas.

Si $i \neq j$, on appliquerait la loi de transitivité n°1 du corollaire 9 sur les deux formules $\epsilon_i P_i \cap P_k$ et $\epsilon_j P_j \cap \mathbb{C}P_k$, pour obtenir que $\epsilon_i P_i \cap \epsilon_j P_j \in \mathcal{V}^\heartsuit$, ce qui contredirait l'hypothèse sur la $(k-1)$ -zone initiale.

Si $i = j$, c'est cette fois la loi de transitivité n°3 du corollaire 9 que l'on appliquerait. Cela conduirait à $\epsilon_i P_i \cap \epsilon_l P_l \in \mathcal{V}^\heartsuit$ (pour un $l \neq i$ quelconque, avec $1 \leq l \leq k-1$), ce qui contredirait encore une fois notre hypothèse.

Nous venons de montrer, par l'absurde, que $\epsilon_1 P_1 \cap \dots \cap \epsilon_{(k-1)} P_{(k-1)} \cap \mathbb{C}P_k$ n'était formellement incluse dans aucune des 2-zones de \mathcal{V}^\heartsuit . On peut alors utiliser notre hypothèse de récurrence pour déduire que cette k -formule n'est pas implicitement vide. La $(k-1)$ -formule initiale n'est donc pas non plus implicitement vide (par la contraposée du lemme 2).

La démonstration par récurrence est donc complète. \square

Corollaire 19. *Soit un jeu de prémisses syllogistiquement consistant, traduit en une description implicite binaire de diagramme $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$. Soit \mathcal{D} le diagramme maximal qui répond à $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$. Les seules 2-zones qui n'apparaissent pas sur le diagramme sont celles de \mathcal{V}^\heartsuit .*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition du diagramme maximal et du lemme 6 avec $k = 2$. \square

Remarquons que ce corollaire vaut aussi pour la seconde version de la syllogistique. Il suffit d'adapter la notion de « syllogistiquement consistant », et de préciser que le diagramme est à *patates non triviales*.

Corollaire 20. *Soit un jeu de prémisses syllogistiquement consistant, traduit en une description implicite binaire de diagramme $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$. Soit \mathcal{D} le diagramme maximal qui répond à $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$. Les seules i -zones qui n'apparaissent pas sur le diagramme sont celles qui sont formellement incluses dans une formule de \mathcal{V}^\heartsuit .*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition du diagramme maximal et du lemme 6 dans toute sa généralité. \square

Lemme 7. *Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ une description implicite binaire de diagramme consistante au sens du corollaire 11. Soit $\epsilon P \cap \epsilon' P'$ une formule de 2- zone qui n'est pas un élément de \mathcal{E}^\heartsuit . Alors, aucun graphe n'y est contenu implicitement (cf. def. 11).*

Plus précisément, pour toute formule $\delta Q \cap \delta' Q'$ de \mathcal{E} , on va montrer qu'il existe une formule de zone élémentaire qui vérifie :

- Elle est formellement incluse dans $\delta Q \cap \delta' Q'$.
- Elle n'est pas formellement incluse dans $\epsilon P \cap \epsilon' P'$.
- Elle n'est pas implicitement vide.

Démonstration. Si on est dans le cas où $(1 - \delta)Q$ (ou bien $(1 - \delta')Q'$) s'identifie à ϵP (ou bien $\epsilon' P'$), alors n'importe quelle formule de zone élémentaire qui est formellement incluse dans $\delta Q \cap \delta' Q'$ sans être implicitement vide (cf. def. 10) convient. (L'existence de telles zones élémentaires est assurée par la consistance du diagramme).

Plaçons-nous donc dans le cas contraire. On distingue encore deux sous-cas :

Premier sous-cas : si une et une seule des deux zones ϵP ou $\epsilon' P'$ s'identifie à une des deux zones ϵQ et $\epsilon' Q'$. Convenons (tous les cas se traitent identiquement) que ϵP n'est autre que δQ , mais que $P' \neq Q'$.

On considère alors la formule de 3-zone $\delta Q \cap \delta' Q' \cap (1 - \epsilon')P' = \epsilon P \cap \delta' Q' \cap (1 - \epsilon')P'$. Si cette formule de 3- zone n'est pas implicitement vide, nous aurons atteint notre but en la prolongeant en une n -zone non implicitement vide.

Mais nous allons montrer que cette formule de 3-zone ne saurait être implicitement vide. En effet, d'après la contraposée du lemme 6, cette 3-zone ne peut être implicitement vide que si une des 2-zones

$\delta Q \cap \delta' Q'$ ou $\delta Q \cap (1 - \epsilon')P'$ ou $\delta' Q' \cap (1 - \epsilon')P'$ est dans \mathcal{V}^\heartsuit . Le premier cas est immédiatement à rejeter puisque $\delta Q \cap \delta' Q' \in \mathcal{E}$, et que le diagramme est consistant.

Si $\delta Q \cap (1 - \epsilon')P' \in \mathcal{V}^\heartsuit$ alors, on applique la loi de transitivité n°2-bis (cf. corollaire 9) sur $\delta Q \cap (1 - \epsilon')P' \in \mathcal{V}^\heartsuit$ et $\delta Q \cap \delta' Q' \in \mathcal{E}$, et on obtient que $\delta Q \cap \epsilon' P' = \epsilon P \cap \epsilon' P' \in \mathcal{E}^\heartsuit$. Cela contredit notre hypothèse initiale.

Si $\delta' Q' \cap (1 - \epsilon')P' \in \mathcal{V}^\heartsuit$ alors, on applique la loi de transitivité n°2 (cf. corollaire 9) sur $\delta' Q' \cap (1 - \epsilon')P' \in \mathcal{V}^\heartsuit$ et $\delta Q \cap \delta' Q' \in \mathcal{E}$, et on obtient que $\delta Q \cap \epsilon' P' = \epsilon P \cap \epsilon' P' \in \mathcal{E}^\heartsuit$. Cela contredit notre hypothèse initiale.

Deuxième sous-cas : si aucune des deux zones ϵP ou $\epsilon' P'$ ne s'identifie à aucune des deux zones ϵQ et $\epsilon' Q'$. On considère alors les deux formules de 3-zone : $\delta Q \cap \delta' Q' \cap (1 - \epsilon)P$ et $\delta Q \cap \delta' Q' \cap (1 - \epsilon')P'$. Si une de ces deux formules 3-zones est non implicitement vide, nous aurons atteint notre but comme ci-dessus.

Il ne reste donc plus qu'à réfuter la possibilité que ces deux 3-zones soient toutes deux implicitement vides. D'après le lemme 6, les deux seules manières dont cela pourrait se produire seraient :

- si on a $\delta Q \cap (1 - \epsilon)P \in \mathcal{V}^\heartsuit$ et $\delta Q' \cap (1 - \epsilon')P' \in \mathcal{V}^\heartsuit$ (ou le cas similaire en invertissant Q et Q').
- si on a $\delta Q \cap (1 - \epsilon)P \in \mathcal{V}^\heartsuit$ et $\delta Q \cap (1 - \epsilon')P' \in \mathcal{V}^\heartsuit$ (ou le cas similaire en remplaçant Q par Q').

Si on est dans le premier cas, on applique deux fois de suite la loi de transitivité n°2 (cf. corollaire 9) à partir des deux formules et de $\delta Q \cap \delta' Q' \in \mathcal{E}$. On obtient $\epsilon P \cap \epsilon' P' \in \mathcal{E}$, ce qui contredit notre hypothèse initiale.

Si on est dans le deuxième cas, on applique d'abord la loi de transitivité n°2-bis sur $\delta Q \cap (1 - \epsilon)P \in \mathcal{V}^\heartsuit$ et $\delta Q \cap \delta' Q' \in \mathcal{E}$, pour obtenir $\delta Q \cap \epsilon P \in \mathcal{E}^\heartsuit$. Puis on applique la loi de transitivité n°2 sur la nouvelle formule obtenue et sur $\delta Q \cap (1 - \epsilon')P' \in \mathcal{V}^\heartsuit$. On retombe à nouveau sur $\epsilon P \cap \epsilon' P' \in \mathcal{E}$, ce qui contredit notre hypothèse initiale. \square

Lemme 8. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ une description implicite binaire de diagramme consistante au sens du corollaire 17. Soit $\epsilon P \cap \epsilon' P'$ une formule de 2-zone qui n'est pas un élément de \mathcal{E}^\clubsuit . Alors, aucun graphe n'y est contenu implicitement (cf. def. 11).

Démonstration. $\epsilon P \cap \epsilon' P'$, qui n'est pas dans \mathcal{E}^\clubsuit , n'est pas *a fortiori* dans \mathcal{E}^\heartsuit (scolie 2). Donc le lemme 7 s'applique et nous savons qu'aucun graphe arachnéen décrit par les formules de \mathcal{E} ne sera implicitement compris dans $\epsilon P \cap \epsilon' P'$.

Il ne reste donc qu'à montrer qu'aucun des graphes décrits par :

$$\{\{P_1\}, \dots, \{P_n\}\} \cup \{\{\mathbb{C}P_1\}, \dots, \{\mathbb{C}P_n\}\}$$

ne peut être entièrement inclus dans $\epsilon P \cap \epsilon' P'$.

Evidemment, les graphes correspondant aux formules $(1 - \epsilon)P$ et $(1 - \epsilon')P'$ ne posent aucun problème. Est-ce que le graphe correspondant à ϵP (ou $\epsilon' P'$) pourrait être implicitement inclus dans $\epsilon P \cap \epsilon' P'$? Cela n'est possible que si la 2-zone $\epsilon P \cap (1 - \epsilon')P'$ est implicitement vide. D'après le lemme 6, cela voudrait dire que $\epsilon P \cap (1 - \epsilon')P' \in \mathcal{V}^{\heartsuit=\clubsuit}$. Mais alors, par la loi de transitivité n°3 (seconde version, cf. corollaire 15), on aurait $\epsilon P \cap \epsilon' P' \in \mathcal{E}^\clubsuit$, ce qui contredirait l'hypothèse de départ.

Est-ce qu'un graphe correspondant à δQ où Q diffère de P comme de P' pourrait-il être implicitement inclus dans $\epsilon P \cap \epsilon' P'$? Cela impliquerait que les deux 2-zones $\delta Q \cap (1 - \epsilon)P$ et $\delta Q \cap (1 - \epsilon')P'$ seraient implicitement vides. D'après le lemme 6, cela voudrait dire que ces deux 2-zones sont dans $\mathcal{V}^{\heartsuit=\clubsuit}$ (18). On applique la loi de transitivité n°3 (seconde version) sur $\delta Q \cap (1 - \epsilon)P \in \mathcal{V}^\clubsuit$ pour avoir $\delta Q \cap \epsilon P \in \mathcal{E}^\clubsuit$. On applique alors la loi de transitivité n°2 sur la dernière formule obtenue et sur $\delta Q \cap (1 - \epsilon')P' \in \mathcal{V}^\clubsuit$ pour avoir $\epsilon P \cap \epsilon' P' \in \mathcal{E}^\clubsuit$, ce qui contredirait l'hypothèse de départ. \square

Théorème 5 (Existence du diagramme maximal). *Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ une liste de propositions qui est syllogistiquement consistante au sens de la première version de la syllogistique. Le diagramme \mathcal{D} qui satisfait maximalelement $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ existe.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ la description implicite binaire de graphe qui traduit les prémisses $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Le seul moyen par lequel la construction de notre diagramme pourrait échouer, serait qu'une des 2-zones, disons $\epsilon_1 P \cap \epsilon_2 P'$, figurant dans \mathcal{E} , soit implicitement vide dans $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$. Il faut montrer que cette éventualité ne peut pas survenir si le jeu de prémisses est consistant.

D'après le corollaire 11, puisque notre jeu de prémisses est supposé consistant, la formule $\epsilon_1 P \cap \epsilon_2 P'$, qui appartient à $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}^\heartsuit$, n'appartient pas à \mathcal{V}^\heartsuit . Il suffit alors d'utiliser le lemme 6, en prenant $k = 2$, pour trouver que notre 2-zone est non implicitement vide. Il apparaîtra donc sur le diagramme au moins une zone élémentaire formellement incluse dans $\epsilon_1 P \cap \epsilon_2 P'$, qui pourra accueillir le graphe arachnéen considéré. \square

Théorème 6 (Existence du diagramme maximal à patates non triviales). *Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ une liste de propositions qui est consistante au sens du corollaire 17. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ la description binaire de diagramme qui traduit cette liste de proposition. Le diagramme maximal qui satisfait $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E} \cup \{\{P_1\}, \dots, \{P_n\}\} \cup \{\{\mathbb{C}P_1\}, \dots, \{\mathbb{C}P_n\}\})$ existe. On l'appellera « le diagramme maximal à patates non triviales » répondant au jeu de prémisses initial.*

Démonstration. Le seul moyen par lequel la construction de notre diagramme pourrait échouer, serait qu'une des zones figurant dans $\mathcal{E} \cup \{\{P_1\}, \dots, \{P_n\}\} \cup \{\{\mathbb{C}P_1\}, \dots, \{\mathbb{C}P_n\}\}$ soit implicitement vide dans $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$.

Comme notre liste de proposition est consistante au sens du corollaire 17, on peut employer le corollaire 18. On a donc $\mathcal{V}^\clubsuit = \mathcal{V}^\heartsuit$. Toute 2-zone de \mathcal{E} n'appartient donc pas à \mathcal{V}^\heartsuit , et on peut utiliser le lemme 6 comme dans le théorème précédent.

Il ne nous reste donc qu'à traiter les zones de $\{\{P_1\}, \dots, \{P_n\}\} \cup \{\{\mathbb{C}P_1\}, \dots, \{\mathbb{C}P_n\}\}$. Prenons par exemple (les autres cas sont exactement similaires) la 1-zone P_1 , et supposons qu'elle est implicitement vide dans $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$. Nous allons montrer que cela conduit à une contradiction. Cette hypothèse revient en fait à supposer que les deux zones $P_1 \cap P_2$ et $P_1 \cap \mathbb{C}P_2$ sont toutes deux implicitement vides. La forme contraposée du lemme 6, implique donc $P_1 \cap P_2 \in \mathcal{V}^\heartsuit = \mathcal{V}^\clubsuit$ et $P_1 \cap \mathbb{C}P_2 \in \mathcal{V}^\heartsuit = \mathcal{V}^\clubsuit$. On aura ensuite $P_1 \cap P_2 \in \mathcal{E}^\clubsuit$ par la loi de transitivité n°3, seconde version. Cela rentre en contradiction avec le corollaire 17. \square

Théorème 7 (Equivalence entre méthode diagrammatique et méthode usuelle de la syllogistique, première version). *Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ une liste syllogistiquement (première version) consistante de propositions. Toute proposition β est conséquence de $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, par la méthode syllogistique –première version–, si et seulement si elle en est une conséquence, par la méthode diagrammatique –première version–.*

Démonstration. On traduit notre liste de propositions en une description implicite binaire de graphe $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ à n patates.

Le fait qu'un schéma de raisonnement validé par la méthode diagrammatique puisse l'être également par la méthode syllogistique traditionnelle est un corollaire direct du théorème 5 et du corollaire 10. Supposons en effet que β soit démontrable, par la méthode syllogistique, à partir d'un jeu $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de propositions consistantes. Le théorème 5 nous assure que le diagramme maximal \mathcal{D} satisfaisant à $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ existe. Le corollaire 10 nous assure alors que β est satisfait sur ce diagramme. Autrement dit, il est une conséquence de $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ par notre méthode diagrammatique.

Pour montrer la réciproque (tout schéma de raisonnement validé par la méthode syllogistique usuelle est également validé par la méthode diagrammatique), nous utilisons encore une fois le fait que les propositions démontrables par la syllogistique –première version– sont exactement celles qui sont exprimées par les formules de \mathcal{V}^\heartsuit et \mathcal{E}^\heartsuit . On doit donc montrer qu’aucune autre proposition n’est démontrable par la méthode diagrammatique, que celles qui sont exprimées par une formule de \mathcal{V}^\heartsuit ou de \mathcal{E}^\heartsuit .

Première étape : pour les formules universelles. Par le corollaire 19, nous avons établi qu’aucune autre proposition universelle n’est démontrable par la méthode syllogique (première version) que celles qui sont exprimées par une formule de \mathcal{V}^\heartsuit .

Deuxième étape : pour les formules particulières. Par le lemme 20, nous avons établi qu’aucune autre proposition particulière n’est démontrable par la méthode syllogique (première version) que celles qui sont exprimées par une formule de \mathcal{E}^\heartsuit . \square

Théorème 8 (Equivalence entre méthode diagrammatique et méthode usuelle de la syllogistique, seconde version). *Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ une liste de propositions consistantes selon la seconde version de la syllogistique. Toute proposition β est conséquence de $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, par la méthode syllogistique –seconde version–, si et seulement si elle en est une conséquence, par la méthode diagrammatique –seconde version–.*

Démonstration. La preuve est très proche de la précédente. Il faut juste l’adapter au nouveau cadre.

On traduit notre liste de propositions en une description implicite binaire de graphe $(\mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{E})$ à n patates.

Le fait qu’un schéma de raisonnement validé par la méthode diagrammatique puisse l’être également par la méthode syllogistique traditionnelle est un corollaire direct du théorème 6 et du corollaire 16. Supposons en effet que β soit démontrable, par la méthode syllogistique seconde version, à partir d’un jeu $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de propositions consistantes. Le théorème 6 nous assure que nous pouvons construire le diagramme maximal \mathcal{D} à patates non triviales satisfaisant à $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Le corollaire 16 nous assure alors que β est satisfait sur ce diagramme. Autrement dit, il est une conséquence de $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ par notre méthode diagrammatique.

Pour montrer la réciproque (tout schéma de raisonnement validé par la méthode syllogistique usuelle est également validé par la méthode diagrammatique), nous utilisons le corollaire 16, qui nous apprend que les propositions démontrables par la syllogistique –première version– sont exactement celles qui sont exprimées par les formules de \mathcal{V}^\clubsuit et \mathcal{E}^\clubsuit . On doit donc montrer qu’aucune autre proposition n’est démontrable par la méthode diagrammatique (seconde version), que celles qui sont exprimées par une formule de \mathcal{V}^\clubsuit et \mathcal{E}^\clubsuit .

Première étape : pour les formules universelles. Par le corollaire 18, on est dans le cas où $\mathcal{V}^\clubsuit = \mathcal{V}^\heartsuit$ et nous avons établi dans le corollaire 19 qu’aucune autre proposition universelle n’est démontrable par la méthode diagrammatique que celles qui sont exprimées par une formule de $\mathcal{V}^\heartsuit = \mathcal{V}^\clubsuit$.

Deuxième étape : pour les formules particulières. Soit β une proposition particulière démontrable par la méthode syllogistique (seconde version). Cela s’exprime par l’existence d’un certain graphe arachnéen dans \mathcal{D} , dont la portée est incluse dans une 2–zone du type $\epsilon P \cap \epsilon' P'$. Il s’agit de montrer que la formule $\epsilon P \cap \epsilon' P'$ est nécessairement un élément de \mathcal{E}^\clubsuit . C’est ce que nous donne la forme contraposée du lemme 8. \square