

# NOTES SUR LES TROIS MÉDIÉTÉS ANCIENNES

Licence Sciences et Humanités. Logique, Langage, Calcul. Semestre 1.

JULIEN BERNARD

## 1 QU'EST-CE QU'UNE MÉDIÉTÉ?

Une médiété est une règle mathématique qui relie trois nombres (respectivement trois grandeurs) différents.

$$a < b < c$$

Les règles que l'on considère sont telles que si deux des trois nombres sont connus, alors le troisième est déterminé. En particulier, si ce sont  $a$  et  $c$  qui sont connus, et  $b$  qui est recherché (mais les autres cas sont tout aussi intéressants), alors une médiété devient une règle mathématique permettant d'insérer un nombre (resp. une grandeur)  $b$  entre deux nombres donnés  $a$  et  $c$ . Le nombre  $b$ , inséré entre les deux autres, sera appelé la *moyenne*, tandis que le terme *médiété* désignera les trois nombres ensembles:  $a < b < c$ .

Les trois médiétés dont on sait qu'elles étaient connues à l'époque de Pythagore et des premiers pythagoriciens étaient:

1. la médiété arithmétique
2. la médiété géométrique
3. la médiété harmonique

Ce sont les trois médiétés qui sont importantes pour reconstruire la gamme pythagoricienne, et ce sont aussi les trois médiétés qui sont importantes pour comprendre la cosmologie de Platon (cf. cours *Système du Monde*, semestre 1).

Mais il existe en fait d'autres médiétés que ces trois là, qui auraient été ajoutées progressivement par les pythagoriciens des générations suivantes. Le philosophe néoplatonicien du premier siècle THÉON DE SMYRNE a démontré qu'il ne pouvait y avoir exactement que 11 sortes de médiétés qui aient réellement un sens<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Il part de la caractérisation selon laquelle une médiété doit prendre la forme générale suivante:

$$\frac{q}{r} = \frac{s-t}{u-v}$$

où, à la place des lettres  $q, r, s, t, u, v$ , on doit placer nos trois nombres  $a, b, c$ . Parmi les  $3^6$  possibilités, on montre que beaucoup aboutissent à des absurdités et que, parmi les significatives, beaucoup se répètent. A la fin, il n'en reste que 11 ou 12 (une des possibilités étant litigieuse).

## 2 CARACTÉRISATION DES TROIS MÉDIÉTÉS ANCIENNES

Voici le tableau résumant les trois médiétés anciennes, retranscrites dans un langage algébrique moderne:

	MÉDIÉTÉ ARITHMÉTIQUE	MÉDIÉTÉ GÉOMÉTRIQUE	MÉDIÉTÉ HARMONIQUE
Définition de la médiété	$c - b = b - a$	$\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$	$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$
Calcul de la moyenne	$b = \frac{a + c}{2}$	$b = \sqrt{a * c}$	$b = \frac{2}{(\frac{1}{a} + \frac{1}{c})}$
Condition pour que la moyenne existe (comme nombre entier)	a et b doivent avoir la même parité.	le produit a * c doit être un carré	le rapport $\frac{a}{c}$ doit être égal à une fraction du type $\frac{n-1}{n+1}$ , où n doit être un commun diviseur de a et c

Quand, partant de deux nombres entiers a et c les conditions expliquées ci-dessus ne sont pas remplies alors, dans le cas des médiétés arithmétiques et harmoniques, cela signifie que la moyenne recherchée, au lieu d'un nombre entier, se trouve être en fait un nombre rationnel.

Exemple:

Entre 3 et 7, il n'y a pas de moyenne harmonique entière. On trouve en effet:

$$b = \frac{2}{(\frac{1}{a} + \frac{1}{c})} = \frac{2}{(\frac{1}{3} + \frac{1}{7})} = \frac{42}{10} = \frac{21}{5}.$$

En revanche, il suffit de multiplier les trois termes par le dénominateur (ici 5), pour trouver une authentique médiété entre nombres entiers. Sur notre exemple:  $15 < 21 < 35$ .

Dans le cas de la médiété géométrique, quand la condition ci-dessus n'est pas remplie, la moyenne recherchée est en fait, dans nos mathématiques actuelles, un nombre irrationnel (cf. cours n°4 sur les pythagoriciens). Dans ce cas, pour les pythagoriciens (et les mathématiciens grecs en général) il n'y avait pas de nombre qui réponde à la médiété recherchée. On pouvait en revanche transposer cette médiété dans le domaine géométrique, en opérant sur des grandeurs plutôt que des nombres, et on trouvait une construction géométrique (plutôt qu'un calcul) qui fournissait la médiété recherchée. Nous ne le montrerons pas dans le cours.

Voici le texte le plus vieux que nous connaissons qui présente les trois médiétés. Il s'agit d'un fragment d'Archytas de Tarente, rapporté par Porphyre:

Il y a trois médiétés dans la musique ; la première est l'arithmétique, la seconde la géométrique, la troisième est la sous-contraire, que l'on appelle harmonique:

[a] Il y a proportion arithmétique quand trois nombres présentent entre eux une différence successive analogue [au sens arithmétique]: autant le premier surpasse le second, autant le second surpasse le troisième. Et dans cette proportion il arrive que le rapport des termes plus grands est plus petit tandis que celui des termes plus petit est plus grand ;

[b] Dans la proportion géométrique, le premier terme est au second comme le second est au troisième ; ainsi les termes les plus grands forment un rapport égal à celui des termes plus petits;

[c] Enfin la proportion sous-contraire, que nous appelons harmonique, est celle où les trois termes sont tels que, quelle que soit la partie de lui-même dont le premier dépasse le second, le second surpasse le troisième de la même partie de ce troisième. Dans cette proportion le rapport des termes plus grands est plus grand, celui des plus petits, plus petit.

Fragment d'Archytas, conservé par Porphyre

La définition de la médiété harmonique par Archytas diffère de celle donnée ci-dessus dans le tableau. J'avais annoncé pendant le cours que les définitions étaient équivalentes. A la fin du cours, avec une étudiante de la promotion 2015, nous avons démontré cela. Je donne, ci-dessous, la démonstration que nous avons proposée.

Supposons que nous soyons dans le cas décrit par Archytas. C'est-à-dire qu'il existe un  $n$  tel que:

$$\begin{aligned} c &= b + \frac{c}{n} \\ b &= a + \frac{a}{n} \end{aligned}$$

Montrons alors que nos  $a < b < c$  répondent à la définition de la médiété harmonique dans notre tableau. Nous avons successivement, en effet:

$$b = c\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$b = a\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$c = b \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

$$a = b \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{b} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

En additionnant les deux dernières lignes, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} + \frac{1}{a} &= \frac{2}{b} \\ \text{donc } b &= \frac{2}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)} \end{aligned}$$

C'est bien ce que l'on voulait démontrer. De plus, à partir des deux premières lignes, en écrivant que  $a\left(1 + \frac{1}{n}\right) = b = c\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ , on peut justifier la condition indiquée dans notre tableau ci-dessus. C'est-à-dire qu'on voit que, pour que la médiété harmonique existe comme nombre entier, entre deux nombres  $a$  et  $c$ , il faut que le rapport  $\frac{a}{c}$  puisse s'écrire sous la forme  $\frac{n-1}{n+1}$ , c'est-à-dire comme une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont séparés de 2 unités. Il faut de plus que le  $n$  figurant dans le rapport soit un commun dénominateur à  $a$  et  $c$ .

Exemples:

- Existe-t-il une médiété harmonique entre 1 et 7? Non, car la fraction  $\frac{1}{7}$  ne peut pas se mettre sous la forme  $\frac{n-1}{n+1}$ .
- Existe-t-il une médiété harmonique entre 3 et 9? La fraction  $\frac{3}{9}$  peut se mettre sous la forme  $\frac{n-1}{n+1}$ . En effet,  $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \frac{n-1}{n+1}$  avec  $n = 2$ . Mais 3 et 9 ne sont pas divisibles par 2. Que se passe-t-il alors? Si on prend (par exemple) la première formule d'Archytas, on trouve  $b = a + \frac{a}{n} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$  qui n'est pas un nombre entier.
- Existe-t-il une médiété harmonique entre 2 et 6? La fraction  $\frac{2}{6}$  peut se mettre sous la forme  $\frac{n-1}{n+1}$ . En effet,  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \frac{n-1}{n+1}$  avec  $n = 2$ . Ici, contrairement au cas précédent, 2 et 6 sont bien divisibles par 2. La première formule d'Archytas donne  $b = a + \frac{a}{n} = 2 + \frac{2}{2} = 3$ . Le triplet  $2 < 3 < 6$  est bien une médiété harmonique.

### 3 SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES ET SUITES HARMONIQUES

A partir des trois médiétés anciennes, on peut construire la notion de suites arithmétiques, de suites géométriques et de suites harmoniques.

DÉFINITION Une *suite arithmétique* (respectivement *géométrique* ou *harmonique*) est une suite<sup>2</sup> de nombres:

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$$

telle que trois nombres consécutifs de cette suite forment une médiété arithmétique (respectivement géométrique ou harmonique)

Exemples de suites arithmétiques:

- $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$
- $2 < 4 < 6 < 8 < 10 < \dots$

<sup>2</sup> Conformément à l'usage actuel en mathématiques, on suppose qu'une suite comporte un nombre infini de termes, sauf précision contraire.

- $7 < 11 < 15 < 19 < 23 < \dots$

**Propriété:** Dans une suite arithmétique, deux nombres consécutifs sont toujours séparés par un nombre qui est identique tout au long de la série. Dans le premier exemple, les nombres sont séparés de 1, dans le second exemple, ils sont séparés de 2 et dans le troisième, ils sont séparés de 4.

Exemple de suites géométriques:

- $1 < 2 < 4 < 8 < 16 < \dots$
- $5 < 15 < 45 < 135 < \dots$
- $8 < 12 < 18 < 27$

**Propriété:** Dans une suite géométrique, le rapport entre deux nombres consécutifs est identique tout au long de la série. Dans le premier exemple, ce rapport vaut 2, dans le second exemple il vaut 3, et dans le troisième exemple il vaut  $\frac{2}{3}$ . Si on veut rester dans les nombres entiers, on ne peut pas prolonger le troisième exemple au delà du quatrième terme. On a donc ici uniquement une suite finie (de 4 nombres).

Peut-on construire une suite harmonique infinie? Si on reste dans les nombres entiers, la réponse est non. Par contre, il y a une méthode simple pour obtenir une suite harmonique infinie de nombres rationnels. En effet, il suffit de partir de n'importe quelle suite arithmétique et de prendre les inverses.

Exemples. En prenant les premier et troisième exemples de suite arithmétique, ci-dessus, on obtient les suites harmoniques (composées de nombres rationnels) suivantes:

- $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \dots$
- $\frac{1}{7} > \frac{1}{11} > \frac{1}{15} > \frac{1}{19} > \frac{1}{23} > \dots$

**Remarque:** Si la suite de départ était croissante, alors la suite des inverses est décroissante.

Si on s'en tient aux nombres entiers, on ne peut construire de suites infinies. Mais, en prenant juste les premiers termes d'une des deux séries ci-dessus, on peut construire une suite finie harmonique de nombres entiers aussi longue que l'on veut.

Exemple. On part des 5 premiers termes de la suite ci-dessus:  $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$  et on met toutes les fractions au même dénominateur. Ici, on peut prendre 60 comme commun dénominateur (120, le produit de tous les dénominateurs des fractions ci-dessus marche aussi). On trouve:  $\frac{60}{60} > \frac{30}{60} > \frac{20}{60} > \frac{15}{60} > \frac{12}{60}$ . A présent, en multipliant tous les termes de la suite par 60, et en inversant l'ordre des termes, on trouve la suite harmonique finie:  $12 < 15 < 20 < 30 < 60$ .

**TRAVAIL POUR LA SEANCE PROCHAINE**

- Bien lire le contenu philosophique des deux premiers cours, et préparer des questions si besoin est.
- Bien lire (et comprendre!) le contenu de ces quelques pages sur les médiétés et s'assurer que l'on a bien compris les définitions des trois médiétés anciennes, et les méthodes pour les construire.  
Il n'est pas nécessaire d'apprendre par coeur ni la définition par Archytas de la médiété harmonique (la définition à partir des inverses suffit), ni la démonstration d'équivalence entre les deux définitions proposées de la médiété harmonique.
- Préparer des questions sur les médiétés si certaines parties de ces pages vous échappent.
- Réviser comment on met au même dénominateur une liste de plusieurs fractions.