



Cosmologie platonicienne+La doctrine pythagoricienne de la connaissance,
Julien Bernard

Introduction à la théorie des polygones et polyèdres réguliers

15 octobre 2015

1 Introduction

Les pythagoriciens étaient connus pour défendre la thèse selon laquelle les nombres (entiers) étaient les principes de toutes choses. Cependant, nous avons vu dans le cours sur la doctrine pythagoricienne de la connaissance (cf. LOGIQUE, LANGAGE, CALCUL, Semestre 1) qu'ils donnaient une dimension immédiatement géométrique à l'idée de nombre puisque le mode de représentation naturel des nombres consistait à les figurer par des points ou des jetons qu'ils disposaient le long de lignes dessinant des figures géométriques. Or, les figures géométriques choisies pour figurer les nombres n'étaient pas n'importe quelles figures géométriques, mais plutôt ce qu'on appelle les polygones et polyèdres réguliers convexes. Ainsi fabriquaient-ils des nombres triangulaires, carrés, pentagonaux, tétraédriques, cubiques, etc. La configuration géométrique donnée aux unités formant les nombres participait ensuite à leur teneur conceptuelle et mystique. Le fait de choisir des polygones et polyèdres *réguliers* tient sans doute aux propriétés de *symétrie* que possèdent ces figures, la symétrie jouant un rôle fondamental pour l'esthétique grecque et pythagoricienne en particulier.

Nous verrons dans le cours sur le *Timée* que les polyèdres réguliers ont été utilisés par Platon pour donner une explication mathématique de la nature des quatre éléments physiques traditionnels (feu, air, eau, terre) et pour étudier la forme globale du Cosmos.

2 Définitions dans le plan

Définition 1. Un *polygone* est une ligne fermée formée d'une succession (finie) de segments. On appelle ces segments les *côtés* du polygone, et les extrémités des côtés sont appelés *sommets*.

Définition 2. Un polygone est dit *équilatéral* si tous ses côtés sont de même longueur.

Définition 3. Un polygone est dit *équiangulaire* si tous ses angles sont de même mesure.

Remarquons qu'il existe des polygones équilatéraux qui ne sont pas nécessairement équiangulaires. Exemple : le losange.

Définition 4. Un polygone est dit **régulier** si il est à la fois équilatéral et équiangulaire.

Définition 5. Un polygone est dit **convexe** si le segment qui est formé à partir de deux points A et B quelconques sur le polygone est entièrement inclus à l'intérieur du polygone.

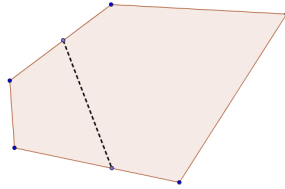


FIGURE 1 – Ceci est un polygone convexe. Le segment en pointillé (comme tout autre segment formé à partir de deux points du polygone) est entièrement à l'intérieur du polygone.

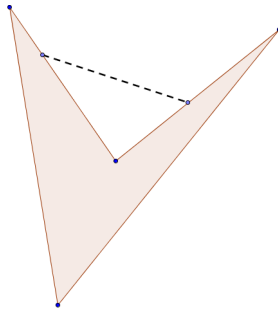


FIGURE 2 – Ceci n'est pas un polygone convexe. Le segment en pointillé choisi n'est pas à l'intérieur du polygone.

Remarquons qu'il existe des polygones réguliers non convexes. Ce sont des polygones *étoilés*, que l'on reconnaît au fait que les segments qui le composent se croisent.

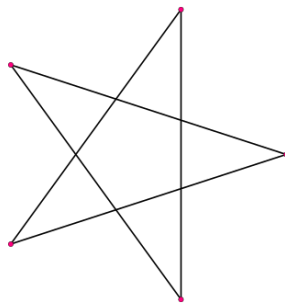


FIGURE 3 – Ceci est un polygone régulier non convexe : l'étoile à cinq branches ou *pentagramme*. Attention, il faut comprendre que ce polygone n'a que 5 côtés, qui se croisent et traversent de par en par la figure. Cette figure avait un caractère sacré dans certaines écoles pythagoriciennes.

3 Constructions dans le plan et cercle circonscrit

Nous pouvons nous demander combien il existe de polygones réguliers convexes. Le théorème suivant répond à la question.

Théorème 1. *Si on se donne comme hypothèse la possibilité de pouvoir découper l'angle plein (360°) à volonté en n angles égaux, alors pour tout $n \geq 3$ il existe un polygone régulier convexe à n côtés. Ainsi, il en existera une infinité, qu'on appellera : triangle équilatéral, carré, pentagone régulier, hexagone régulier, heptagone régulier, ...*

Démonstration. En effet, on prend un point O et on trace un cercle de centre O . On découpe ensuite l'angle plein autour de O en n angles égaux. Les demi-droites engendrées par ce découpage coupent le cercle en n points A_1, A_2, \dots, A_n . Les triangles $(OA_1A_2), (OA_2A_3), \dots$ ont deux longueurs de côtés en commun (correspondant aux rayons du cercle) et ont un angle de même mesure au sommet. Ainsi, tous ses triangles sont identiques. On en déduit immédiatement que la figure dessinée est un polygone régulier. \square

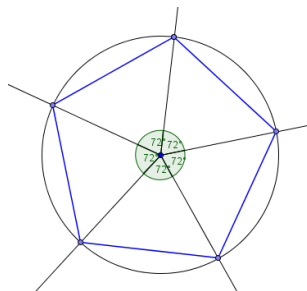


FIGURE 4 – Si vous savez couper un angle en n parties égales, alors vous savez construire un polygone régulier convexe à n côtés. Exemple : le pentagone.

Remarquons que la condition demandée pour ce théorème (la possibilité de pouvoir découper l'angle plein en n) n'était généralement pas accordée par tous les géomètres grecs ; notamment ceux qui voulaient s'en tenir à une géométrie « de la règle et du compas ». Cf. la discussion à ce sujet sur le forum AMETICE (dans le cours LLC sur les pythagoriciens).

On voit par ailleurs que la construction précédente est basée sur la propriété suivante des polygones réguliers (on omet la démonstration).

Lemme 1. *Les sommets d'un polygone régulier (convexe ou pas) se trouvent tous sur un même cercle. On l'appellera le **cercle circonscrit** au polygone régulier considéré.*

4 Symétrie maximale des polygones réguliers

Nous allons donner à présent un contenu mathématique précis à l'idée que les polygones réguliers sont maximalelement symétriques.

Définition 6. *Une **congruence** (ou une **isométrie**) du plan est une manière de déplacer les points du plan sans modifier les distances entre deux points donnés.*

Exemples de congruence : une translation, une rotation, une symétrie axiale orthogonale ou une symétrie centrale.

Définition 7. *Un polygone est dit **maximalement symétrique** si, pour deux sommets quelconques A et B , et deux côtés quelconques a, b (a étant un côté d'extrémité A , et b étant un côté d'extrémité B), il existe une congruence du plan qui transforme le point A en le point B et le côté a en le côté b , tout en laissant globalement invariant le polygone.*

Exemple : le triangle équilatéral (ABC) est une figure maximalement symétrique puisque les deux rotations autour du centre de symétrie I du triangle, d'angles respectifs $+120^\circ$ et -120° , laissent invariante le triangle et envoient le sommet A respectivement sur B et sur C .

A présent, le lien entre l'idée de polygone régulier et l'idée de symétrie est précisé grâce au théorème suivant (dont la démonstration ne serait pas très difficile) :

Théorème 2. *Un polygone est maximalement symétrique si et seulement si il est régulier.*

5 Définitions dans l'espace

Nous quittons à présent la dimension 2 du plan pour nous élever à la troisième dimension et aux solides.

Définition 8. *Un **polyèdre** est une surface fermée formée par la juxtaposition d'un nombre fini de surfaces planes, chacune étant délimitée par un polygone. On dit que ces surfaces planes sont les **faces** du polyèdre ; les côtés des polygones délimitant les faces sont les **arêtes** du polyèdre, et les extrémité de ses arêtes sont les **sommets** du polyèdre.*

Définition 9. *Un polyèdre est dit **régulier** si toutes ses faces sont formées de polygones réguliers identiques, et si tous les sommets du polyèdre appartiennent au même nombre d'arêtes.*

Définition 10. *Un polyèdre est dit **convexe** si le segment qui est formé à partir de deux points A et B quelconques sur le polyèdre est entièrement inclus à l'intérieur du polyèdre.*

C'est la même définition que pour les polygones ! Là aussi, il se trouve qu'il existe des polyèdres réguliers qui ne sont pas convexes



FIGURE 5 – Ceci est un polyèdre régulier non convexe. C'est le *petit dodécaèdre étoilé*.

6 Constructions dans l'espace et sphère circonscrite

Nous pouvons nous demander combien il existe de polyèdres réguliers convexes. Contrairement au cas des polygones, il n'y en a pas une infinité. Le théorème suivant répond à la question. Ce théorème est généralement attribué au mathématicien Théétète, contemporain de Platon et protagoniste du dialogue éponyme. Théétète était un mathématicien pythagoricien, ou du moins travaillant sur des thématiques typiquement pythagoriciennes. On trouvait des traces de certains polyèdres réguliers très tôt (dès la préhistoire) dans l'architecture (le cube, le tétraèdre), ou pour construire des objets comme des ballons (le dodécaèdre). Cependant ses formes semblent n'être venues au centre d'une théorie mathématique qu'avec les pythagoriciens. Ceux-ci ont complété la liste pour arriver à cinq. Mais ce serait plus précisément Théétète qui aurait démontré rigoureusement que la liste est alors achevée. Je ne sais pas si la méthode de Théétète était précisément celle utilisée ci-dessous.

Théorème 3 (Théorème de Théétète). *Il n'existe que 5 polyèdres réguliers convexes (à une congruence ou une homothétie près) : le tétraèdre (4 faces triangulaires), le cube (6 faces carrées), l'octaèdre (8 faces triangulaires), l'isocaèdre (20 faces triangulaires) et le dodécaèdre (12 faces pentagonales).*

Démonstration. Appelons c le nombre de côtés figurant sur chaque face et f le nombre de faces entourant chaque sommet. On a bien sûr (voyez-vous pourquoi ?) $c \geq 3$ et $f \geq 3$. Chaque face est donc un polygone régulier convexe à c côtés. La somme des angles d'un polygone à c côtés vaut $(c - 2) * 180^\circ$. Puisque tous les angles d'un polygone régulier sont égaux, ils valent chacun $\frac{(c-2)}{c} * 180^\circ$. Ainsi, les angles d'un triangle équilatéral valent 60° , les angles d'un carré valent 90° , les angles d'un pentagone régulier valent 108° , ceux d'un hexagone régulier valent 120° , etc. Maintenant, autour de chaque sommet, nous auront f faces, donc f angles. Or, il ne faut pas que la somme des angles entourant un sommet soit supérieure ou égale à 360° . Si on essaie de composer un tétraèdre régulier à l'aide de triangles (équilatéraux) on ne pourra en mettre que 3, 4 ou 5 par sommet, car ensuite : $6 * 60^\circ = 360^\circ$. Si on essaie de composer un polyèdre avec des carrés on ne pourra en mettre que 3 par sommet, car ensuite : $4 * 90^\circ = 360^\circ$. De même, si on essaie de construire un polyèdre avec des pentagones, on ne pourra en mettre que 3 par sommet, car ensuite : $4 * 108^\circ = 432^\circ > 360^\circ$. A partir de l'hexagone, toute construction devient impossible puisque déjà 3 hexagones autour d'un sommet donnent $3 * 120^\circ = 360^\circ$.

Les seules valeurs qui conviennent sont finalement :

- $c = 3, f = 3$ (le tétraèdre)
- $c = 3, f = 4$ (l'octaèdre)
- $c = 3, f = 5$ (l'isocaèdre)
- $c = 4, f = 3$ (le cube)
- $c = 5, f = 3$ (le dodécaèdre)

□

Par ailleurs, les polyèdres réguliers possèdent la propriété suivante (on omet la démonstration).

Lemme 2. *Les sommets d'un polyèdre régulier (convexe ou pas) se trouvent tous sur une même sphère. On l'appellera la **sphère circonscrite** au polyèdre régulier considéré.*

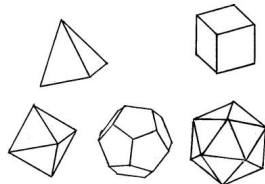


FIGURE 6 – Les 5 polyèdres réguliers convexes dits « solides platoniciens » ou parfois plus justement « pythagoriciens ».

7 Symétrie maximale des polyèdres réguliers

Comme pour les polygones, les polyèdres réguliers sont maximale-ment symétriques, et cela explique en partie l'intérêt qu'y portaient les pythagoriciens.

Définition 11. Une *congruence* ou une *isométrie* de l'espace est une manière de déplacer les points de l'espace sans modifier les distances entre deux points donnés.

Exemples de congruence : une translation, une rotation par rapport à un axe, une symétrie orthogonale par rapport à un plan.

Définition 12. Un polyèdre est dit *maximalement symétrique* si, pour deux sommets quelconques A et B , et deux arêtes quelconques a, b , et deux faces quelconques F, G (a étant une arête d'extrémité A contenue dans F , et b étant une arête d'extrémité B contenue dans G), il existe une congruence de l'espace qui transforme le point A en le point B , et le côté a en le côté b , et la face F en la face G , tout en laissant globalement invariant le polyèdre.

En manipulant les maquettes des cinq solides platoniciens que j'ai amenées en cours, vous voyez facilement qu'on peut amener par des « rotations dans l'espace », n'importe quel sommet sur n'importe quel sommet, n'importe quelle arête sur n'importe quelle arête et n'importe quelle face sur n'importe quelle face.

A présent, le lien entre l'idée de polyèdre régulier et l'idée de symétrie est précisé grâce au théorème suivant (dont la démonstration ne serait pas très difficile) :

Théorème 4. Un polyèdre est maximalement symétrique si et seulement si il est régulier.